

# 基于 Pignistic 概率转换和奇异值分解的证据冲突度量方法

郭兴林, 孙振晓, 周昱瑶, 漆莲芝, 张谊

(中国工程物理研究院计算机应用研究所, 四川 绵阳 621900)

**摘 要:** 针对常见证据冲突度量方法适应性差、准确性低的问题, 提出了一种基于 Pignistic 概率转换和奇异值分解的证据冲突度量方法。首先通过 Pignistic 概率转换将证据焦点差异映射到信度差异上, 构建证据复合信任函数矩阵。然后采用奇异值分解的方法提取矩阵特征, 根据奇异值特性将矩阵特征空间划分为相似子空间和冲突子空间, 综合考虑证据矩阵相似特性和冲突特性, 将冲突子空间奇异值与相似子空间奇异值之比作为新的冲突度量因子。最后在全冲突场景、变信度场景、变焦元场景、焦点嵌套场景等多种证据冲突场景下将所提方法与常见方法进行了对比分析, 结果表明所提方法具有适应性广、准确性高、稳定性好的特点。

**关键词:** 证据理论; 证据冲突度量; Pignistic 概率转换; 奇异值分解

**中图分类号:** TP391

**文献标识码:** A

**DOI:** 10.11959/j.issn.1000-436x.2021086

## Evidence conflict measurement method based on Pignistic probability transformation and singular value decomposition

GUO Xinglin, SUN Zhenxiao, ZHOU Yuyao, QI Lianzhi, ZHANG Yi

Institute of Computer Application, China Academy of Engineering Physics, Mianyang 621900, China

**Abstract:** In view of the problem of poor adaptability and low accuracy of common evidence conflict measurement method, an evidence conflict measurement method based on Pignistic probability transformation and singular value decomposition was proposed. First, Pignistic probability transformation was used to map the evidence focal element difference to the belief difference, and the evidence composite belief function matrix was constructed. Then, the matrix features were extracted by singular value decomposition, and the matrix feature space was divided into similar subspace and conflict subspace according to singular value characteristics. Considering the similarity and conflict characteristics of the evidence matrix, and the ratio of the singular value of the conflict subspace to the singular value of the similar subspace was taken as the new conflict measure factor. Finally, the proposed method was compared with common methods in various evidence conflict scenarios, such as full conflict scenario, variable reliability scenario, variable focus element scenario, focal element nested scenario, and the results show that the proposed method has wide adaptability, high accuracy and good stability.

**Keywords:** evidence theory, evidence conflict measurement, Pignistic probability transformation, singular value decomposition

### 1 引言

DS 证据理论被广泛用于信息融合领域, 然而 Zadeh<sup>[1]</sup>指出在证据存在高冲突时, 直接使用证据理论

进行融合可能得出有悖于常理的结论。针对证据冲突的情况, 主要的解决办法分为 2 类<sup>[2]</sup>, 一类是对冲突证据进行预处理<sup>[3-6]</sup>, 消除或降低证据间的冲突性; 另一类是修改证据合成规则<sup>[7-13]</sup>, 将证据间冲突进行再

收稿日期: 2020-11-25; 修回日期: 2021-03-24

基金项目: 国家国防科技工业局技术基础科研基金资助项目 (No.JSZL2015212B001)

**Foundation Item:** The Technical Basic Research Project of State Administration of Science, Technology and Industry for National Defence (No.JSZL2015212B001)

分配。这 2 类方法均需要对证据间冲突进行准确度量。

国内外学者针对证据冲突度量进行了大量研究, Josselme 等<sup>[14]</sup>给出了集合的相似性定义, 采用证据间距离衡量证据冲突度。杨风暴<sup>[15]</sup>给出了证据一致度、证据冲突度、证据冲突强度、证据冲突/一致度等参数描述证据冲突程度。Liu<sup>[16]</sup>采用 Pignistic 概率转换定义了证据间 Pignistic 概率距离, 将其作为证据间冲突度量指标。蒋雯等<sup>[17]</sup>改进了 Josselme 距离冲突度量方法, 将 Josselme 距离和冲突因子联合, 取其均值作为新的冲突因子。柯小路等<sup>[18]</sup>通过构建证据基本概率分配 (BPA, basic probability assignment) 矩阵, 对其进行奇异值分解, 利用最小奇异值表示证据间冲突。宋亚飞等<sup>[19]</sup>在分析证据相关性与冲突关系的基础上, 给出了基于证据相关系数的冲突判定准则。包甜甜等<sup>[2]</sup>采用交叉熵表示证据的散度, 通过 Hamacher T-余范融合证据距离和证据散度来度量证据间冲突。上述方法在部分冲突场景下具有较好的适应性, 一定程度上弥补了经典冲突因子的缺陷, 但仍存在一些不足。为此, 本文提出了一种基于 Pignistic 概率转换和奇异值分解的证据冲突度量方法, 能够较好地适应证据融合时可能出现的多种证据冲突场景。

## 2 DS 证据理论及其存在的问题

DS 证据理论是由 Dempster<sup>[20]</sup>提出, 后经 Shafer<sup>[21]</sup>扩充和发展形成的证据推理方法。

**定义 1** 设  $\Theta$  为辨识框架,  $\Theta$  的所有可能子集构成幂集  $2^\Theta$ 。一个 BPA 函数定义为映射  $m: 2^\Theta \rightarrow [0,1]$ , 满足<sup>[20]</sup>

$$\begin{cases} \sum_{A_i \subseteq \Theta} m(A_i) = 1 \\ m(\Phi) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $\Phi$  为空集; 对于命题  $A_i$ ,  $m(A_i)$  为  $A_i$  的基本概率分配, 表示对  $A_i$  的信任程度, 若  $m(A_i) > 0$ , 则称  $A_i$  为焦点<sup>[20]</sup>。

**定义 2** 设  $m_1, m_2, \dots, m_N$  是同一辨识框架上的  $N$  个基本概率分配函数, 焦点为  $A_j (j=1, 2, \dots, N)$ , DS 合成规则定义为<sup>[21]</sup>

$$m_{1,2,\dots,N}(A) = \begin{cases} 0, & A = \Phi \\ \frac{\sum_{\bigcap_{A_j=A} \left( \prod_{1 \leq i \leq N} m_i(A_j) \right)}}{1-K}, & \Phi \subset A \subseteq \Theta \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $K = \sum_{\bigcap_{A_j=\Phi} \left( \prod_{1 \leq i \leq N} m_i(A_j) \right)}$  为冲突因子,  $K$  越大

表示证据间冲突越大, 当  $K \rightarrow 1$  时, 利用 DS 合成规则得到的融合结果可能有悖于常理。 $K$  相当于分配给空集的信任, 仅反映证据焦点之间的非相容性, 即互斥性, 而未充分反映证据之间的差异性, 这导致  $K$  在部分证据冲突场景下无法有效反映证据间的冲突程度<sup>[22]</sup>, 如例 1 所示。

**例 1** 设辨识框架  $\{\theta_1, \theta_2\}$ , 证据  $E_1$ 、 $E_2$  的基本概率函数  $m_1$ 、 $m_2$  满足

$$\begin{aligned} m_1(\theta_1) &= 0.5, & m_1(\theta_2) &= 0.5 \\ m_2(\theta_1) &= 0.5, & m_2(\theta_2) &= 0.5 \end{aligned}$$

证据  $E_1$ 、 $E_2$  是完全一致的, 理论上证据冲突应该为 0, 而  $K$  度量结果为 0.5, 表示证据间存在较大冲突。正因为  $K$  仅局部反映了证据焦点间的非相容程度, 导致  $K$  度量结果与实际情况不符。

## 3 常见证据冲突度量方法

针对经典的冲突因子  $K$  在部分证据冲突场景下存在冲突度量失准的问题, 不少学者对证据冲突度量方法进行了深入研究, 提出了一些改进方法, 具有代表性的有以下几种。

**定义 3** Josselme 证据距离。假设辨识框架  $\Theta$  下的有  $N$  个相互独立的元素,  $m_1$ 、 $m_2$  是证据  $E_1$ 、 $E_2$  的基本概率分配函数, 其焦点分别为  $A_i$ 、 $B_j$ , 则  $m_1$ 、 $m_2$  之间的 Josselme 距离可以表示为<sup>[14]</sup>

$$d_{\text{BPA}}(m_1, m_2) = \sqrt{\frac{1}{2} (m_1 - m_2)^T D (m_1 - m_2)} \quad (3)$$

其中,  $m_1$ 、 $m_2$  是由  $m_1$ 、 $m_2$  构成的  $2^N$  维列向量;  $D$  是焦点关联矩阵, 为  $2^N \times 2^N$  的正定系数矩阵, 其元素可表示为

$$d_{ij} = \frac{|A_i \cap B_j|}{|A_i \cup B_j|}, \quad A_i, B_j \in \Theta \quad (4)$$

**定义 4** Pignistic 概率距离。设  $m_1$  和  $m_2$  是辨识框架  $\Theta$  下证据  $E_1$  和  $E_2$  的基本概率分配函数,  $\text{BetP}_{m_1}$  和  $\text{BetP}_{m_2}$  分别为其 Pignistic 概率转换, 则 Pignistic 概率距离定义为<sup>[16]</sup>

$$\text{difBetP}(m_1, m_2) = \max_{A \subseteq \Theta} \left( \left| \text{BetP}_{m_1}(A) - \text{BetP}_{m_2}(A) \right| \right) \quad (5)$$

其中, Pignistic 概率转换函数定义为

$$\text{BetP}_m(A) = \sum_{B \subseteq \Theta, \forall A \subseteq \Theta} \frac{|A \cap B|}{|B|} \frac{m(B)}{1 - m(\Phi)} \quad (6)$$

Pignistic 概率距离描述证据间对于不同焦点支持程度的最大差异。

定义 5 联合冲突度量因子。设任意两证据间 Dempster 冲突因子为  $K_{ij}$ , Jusselme 证据距离为  $d_{\text{BPA}}(m_i, m_j)$ , 联合冲突度量因子定义为<sup>[17]</sup>

$$K_d(m_i, m_j) = \frac{K_{ij} + d_{\text{BPA}}(m_i, m_j)}{2} \quad (7)$$

定义 6 相关系数。设  $m_1$  和  $m_2$  是辨识框架  $\Theta$  下证据  $E_1$  和  $E_2$  的基本概率分配函数,  $m_1$  和  $m_2$  之间相关系数定义为<sup>[19]</sup>

$$\text{Cor}(m_1, m_2) = \frac{\langle m'_1, m'_2 \rangle}{\|m'_1\| \|m'_2\|} \quad (8)$$

其中,  $m'_1 = m_1 D$ ,  $m'_2 = m_2 D$ ,  $D$  与定义 3 保持一致。

定义 7 最小奇异值。设  $m_1$  和  $m_2$  是辨识框架  $\Theta$  下证据  $E_1$  和  $E_2$  的基本概率分配函数, 对应的焦点集为  $A$  和  $B$ , 记  $C = A \cup B = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ , 则可定义如下 BPA 矩阵<sup>[18]</sup>

$$M = \begin{bmatrix} m_1(C_1), \dots, m_1(C_m) \\ m_2(C_1), \dots, m_2(C_m) \end{bmatrix} \quad (9)$$

则证据冲突量定义为

$$\text{diSV} = \min(\sigma(MD)) \quad (10)$$

其中,  $\sigma(MD)$  表示对  $MD$  矩阵进行奇异值分解后得到的奇异值, 直接选取最小奇异值用于度量证据间冲突。

## 4 新的证据冲突度量方法

证据冲突本质上可理解为证据对焦点信任的差异。在证据理论框架下, 两方面的原因导致证据间存在冲突<sup>[23]</sup>: 一方面是证据源可靠性不足导致证据信度存在差异, 例如专家主观判断存在误差、传感器抗干扰能力不足等; 另一方面是由于对事物认知不充分导致辨识框架不完整, 证据给出支持多子集命题甚至完全未知的结论。综上所述, 证据冲突表现在定量信度和定性焦点差异 2 个层面, 对二者进行充分考虑是准确度量证据冲突的关键。

### 4.1 Pignistic 概率转换构建证据复合信任函数矩阵

Jusselme 等<sup>[14]</sup>提出的焦点关联矩阵  $D$  被广泛用于衡量证据焦点差异, 如定义 3、定义 6 和定义 7

所示, 其应用模式一般为

$$M' = MD \quad (11)$$

其中,  $M$  为广义的概率分配函数矩阵,  $M'$  为矩阵转换后的信任函数矩阵, 其元素  $m'_{ij}$  可表示为

$$m'_{ij} = \sum_{j=1}^N m_{ij} d_{ji} \quad (12)$$

从式(12)可以看出,  $D$  的本质作用是在各相容、互斥焦点之间进行基本概率映射, 将证据焦点差异映射到信度差异上去, 但这种映射缺乏相应的理论支撑, 物理意义并不明确。另外, 由于  $D$  为正定矩阵, 满足  $d_{ij} = d_{ji}$ , 映射过程可能会引入干扰, 破坏证据特征, 造成冲突度量的准确性降低。例如, 当焦点  $\{\theta_2, \theta_3\}$  向  $\{\theta_1, \theta_2\}$  概率映射时会将其概率的 1/3 分配给焦点  $\{\theta_1, \theta_2\}$ , 反之亦然, 概率转换的比例意义不明确。又如, 在焦点  $\{\theta_1, \theta_2\}$  向  $\theta_1$  概率映射过程中, 会将  $\{\theta_1, \theta_2\}$  信任的 1/2 分配给  $\theta_1$ , 这种映射类似于 Pignistic 概率转换, 反之, 在焦点  $\theta_1$  向  $\{\theta_1, \theta_2\}$  概率映射过程中, 同样会将  $\theta_1$  信任的 1/2 分配给  $\{\theta_1, \theta_2\}$ 。类似的映射虽然在一定程度上可以将焦点差异反映到信度差异上, 但同时可能会引入干扰, 造成算法度量性能下降。

为了能准确充分地反映证据焦点差异, 同时不引入干扰, 采用具有概率论和集合论支撑的 Pignistic 概率转换<sup>[8]</sup>, 将焦点差异映射到信度差异上, 其矩阵形式可表示为

$$M' = MP \quad (13)$$

其中,  $P$  表示焦点概率转换矩阵,  $p_{ij}$  表示焦点  $B_j$  向焦点  $A_i$  概率转换的转换系数。不同于  $D$ ,  $P$  为非对称矩阵,  $p_{ij}$  是有方向性的,  $p_{ij}$  定义为

$$p_{ij} = \frac{|A_i \cap B_j|}{|B_j|} \quad (14)$$

转换后  $M'$  的行向量即为原 BPA 经 Pignistic 概率转换的信任函数, 实现了焦点差异向信度差异的有效映射。但由于 Pignistic 概率转换会拓展证据的焦点集合, 为原始证据不信任的焦点分配信任度, 造成原始证据部分信息丢失, 导致无法有效区分未知命题和同概率命题等情况。为了能充分表征证据差异特征, 构建证据复合信任函数矩阵  $M''$ ,  $M''$  满足

$$M'' = M + M' = M(I + P) \quad (15)$$

其中,  $\mathbf{I}$  为  $n$  阶单位矩阵;  $\mathbf{M}''$  中每个证据向量既包含原始的信度差异特征, 也包含映射后的焦元差异特征。

#### 4.2 基于奇异值分解的证据冲突度量因子

在衡量证据信度差异方面, 现有方法易受证据信度分布离散程度的影响, 难以有效反映证据特征。由于矩阵奇异值分解能够有效提取矩阵结构特征, 本文提出了一种改进的基于奇异值分解的证据冲突度量方法, 通过提取证据复合信任函数矩阵的奇异值来度量证据间的冲突情况。

**定义 8** 设任意 2 个证据复合信任函数矩阵  $\mathbf{M}'' \in R^{2 \times n}$ ,  $\mathbf{M}''$  中元素  $m_{ij}''$  表示第  $i$  个证据对第  $j$  个焦元的信任程度, 则存在正交矩阵  $\mathbf{U} \in R^{2 \times 2}$  和  $\mathbf{V} \in R^{n \times n}$ , 使<sup>[24]</sup>

$$\mathbf{M}'' = \mathbf{U} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{V}^T \quad (16)$$

其中,  $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ , 且  $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ , 其对应角元素按照顺序排列, 即  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ ,  $r = \text{rank}(\mathbf{M}'')$ 。  $\boldsymbol{\Sigma}_1$  表示矩阵通过  $\mathbf{U}$  空间变换后相对于  $\mathbf{V}$  空间的伸缩因子, 非零奇异值的个数  $r$  表示矩阵特征方向的数目, 奇异值的大小则反映该特征方向的重要性。

考虑到证据复合信任函数矩阵的多变性、复杂性, 其特征方向的个数及重要性都是不断变化的, 且重要性具有一定的相对性。文献[18]仅将最小奇异值对应的特征方向作为冲突, 而未结合矩阵的主要特征方向进行考虑, 忽略了冲突与相似的相对性, 具有一定的局限性。因此综合考虑证据矩阵相似特性和冲突特性, 将矩阵空间划分为相似子空间  $\mathbf{S}$  和冲突子空间  $\mathbf{N}$ , 相似子空间由奇异值最大的特征方向构成, 表示证据矩阵的主特征方向, 证据矩阵在该特征方向上是趋于相似的, 冲突子空间由奇异值较小的特征方向构成, 表示证据矩阵在这些特征方向上是冲突的。

**定义 9** 对于任意 2 个证据构成的复合信任函数矩阵  $\mathbf{M}''$ , 其相似子空间  $\mathbf{S}$  和冲突子空间  $\mathbf{N}$  维数均为 1, 证据冲突度量因子定义为

$$G_{\text{SVD}} = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \quad (17)$$

其中,  $\sigma_{\max}$ 、 $\sigma_{\min}$  分别为  $\mathbf{M}''$  奇异值分解后的最大、最小奇异值;  $G_{\text{SVD}}$  越大, 表示证据间冲突越大。改进的冲突度量因子全面考虑了证据矩阵的结构特

征, 能够较好地对证据间冲突进行度量, 具有以下性质。

- 1)  $m_1 = m_2 \Leftrightarrow G_{\text{SVD}} = 0$ 。
- 2)  $m_1$ 、 $m_2$  完全冲突  $\Leftrightarrow G_{\text{SVD}} = 1$ 。
- 3) 非负性:  $0 \leq G_{\text{SVD}} \leq 1$ 。
- 4) 交换性:  $G_{\text{SVD}}(m_1, m_2) = G_{\text{SVD}}(m_2, m_1)$ 。
- 5) 具有较好的稳定性。

性质 1) 证明。

充分性。当  $m_1 = m_2$  时, 证据完全一致, 有  $m_1'' = m_2''$ , 由奇异值分解性质可得, 证据矩阵  $\mathbf{M}''$  非满秩, 矩阵存在零奇异值, 即  $\sigma_{\min} = 0$ , 因此  $G_{\text{SVD}} = 0$ 。

必要性。若  $G_{\text{SVD}} = 0$ , 则证据矩阵  $\mathbf{M}''$  非满秩,  $\mathbf{M}''$  行向量线性相关, 即  $m_1'' = \alpha m_2''$ , 又因为  $m_1'' = m_1(\mathbf{I} + \mathbf{P})$ ,  $m_2'' = m_2(\mathbf{I} + \mathbf{P})$ ,  $\sum_{i=1}^N m_1(A_i) = 1$ ,  $\sum_{i=1}^N m_2(B_i) = 1$ , 故  $\alpha = 1$ ,  $m_1 = m_2$ 。证毕。

性质 2) 证明。

充分性。当证据  $m_1$ 、 $m_2$  完全冲突时, 证据完全支持不同焦元。证据矩阵  $\mathbf{M}''$  可以通过初等列位置变换为  $\mathbf{M}'' = [\mathbf{E}_2 \ \mathbf{0}_{2 \times (n-2)}]$ ,  $\mathbf{E}_2$  为 2 阶单位矩阵, 由奇异值分解性质可知,  $\mathbf{M}''$  奇异值分解后得到奇异值矩阵  $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{E}_r$  ( $r=2$ ) 仍为单位矩阵, 奇异值  $\sigma_i = 1$ ,  $i=1, 2$ , 因此  $G_{\text{SVD}} = 1$ 。

必要性。若  $G_{\text{SVD}} = 1$ , 则  $\sigma_{\max} = \sigma_{\min}$ , 证据矩阵  $\mathbf{M}''$  行向量相互正交,  $\langle m_1'', m_2'' \rangle = 0$ , 又因为  $m_1''(A_i) > 0$ ,  $m_2''(B_i) > 0$ , 因此  $m_1''$ 、 $m_2''$  存在 0 信任值, 且焦元分布位置不同, 即  $m_1''$ 、 $m_2''$  完全信任不同焦元,  $m_1$ 、 $m_2$  完全冲突。证毕。

性质 3) 证明。由性质 1)、性质 2) 以及  $G_{\text{SVD}}$  定义可知,  $0 \leq G_{\text{SVD}} \leq 1$ , 证明略。

性质 4) 证明。由奇异值分解性质可知, 对矩阵行向量进行位置变换, 其奇异值分解结果保持不变, 即  $G_{\text{SVD}}(m_1, m_2) = G_{\text{SVD}}(m_2, m_1)$ 。证毕。

性质 5) 证明。由奇异值分解性质可知, 奇异值具有较好的稳定性。设  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B} \in R^{m \times n}$ , 其奇异值分别为  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$  和  $\tau_1 \geq \tau_2 \geq \dots \geq \tau_p$ , 其中  $p = \min(m, n)$ , 则有  $|\lambda_i - \tau_i| \leq \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_2$ , 该性质表明当证据矩阵  $\mathbf{A}$  相对于  $\mathbf{B}$  有微小扰动时, 扰动前后矩阵奇异值的变化不会大于扰动矩阵的  $l_2$  范数<sup>[24]</sup>, 确保了证据变化时度量结果的稳定性, 并通过算例

进行了验证。证毕。

### 5 算例分析

为了验证  $G_{SVD}$  方法的冲突度量性能,在典型证据冲突场景下与常见方法进行了对比分析。由于  $d_{BPA}$ 、 $difBetP$ 、 $K_d$ 、 $Cor$ 、 $diSV$ 、 $G_{SVD}$  仅定义了两两证据间的冲突,为方便计算,将证据集合两两间冲突的均值作为全局冲突。

#### 5.1 全冲突场景及其扩展形式

**例 2** 以文献[15]算例为参照,设辨识框架  $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ , 初始证据集合包含证据  $E_1$ 、 $E_2$ , 其 BPA 分别为  $m_1$ 、 $m_2$ , 有  $m_1(\theta_1)=1$ ,  $m_1(\theta_2)=0$ ,  $m_1(\theta_3)=0$ ,  $m_2(\theta_1)=0$ ,  $m_2(\theta_2)=1$ ,  $m_2(\theta_3)=0$ , 向证据集合中添加新的证据  $E_i (i=3,4,\dots,N)$ , 其 BPA 函数为  $m_i(\theta_1)=0$ ,  $m_i(\theta_2)=0$ ,  $m_i(\theta_3)=1$ , 证据集合中证据数目共计  $N$  个,对  $N$  从 2 增加到 6 过程中各方法冲突度量结果进行统计,如表 1 所示。

表 1 全冲突场景冲突度量结果

$N$	$K$	$d_{BPA}$	$difBetP$	$K_d$	$Cor$	$diSV$	$G_{SVD}$
2	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1
4	1	0.833	0.833	0.916 5	0.833	0.833	0.833
5	1	0.7	0.7	0.85	0.7	0.7	0.7
6	1	0.6	0.6	0.8	0.6	0.6	0.6

当  $N=2,3$  时,证据分别完全信任不同的焦点,证据完全冲突,各方法均能正确度量。当  $N>3$  时,新加入的证据完全支持  $\theta_3$ ,新的证据集合对  $\theta_3$  信任度持续增加,证据集合的一致性增强,证据间冲突应相应减小。从表 1 中可以看出,  $K$  由于存在“一票否决”的特性,新加入的证据对  $\theta_3$  的支持度被  $m_1(\theta_3)=0$ 、 $m_2(\theta_3)=0$  否决掉,导致在  $N$  变化过程中始终保持不变,与实际不符。 $d_{BPA}$ 、 $difBetP$ 、 $K_d$ 、 $Cor$ 、 $diSV$ 、 $G_{SVD}$  方法随着  $N$  的增加,冲突度量结果呈递减趋势,趋势变化符合预期,且数值基本保持一致。

**例 3** 以文献[25]算例为基础扩展全冲突场景,设辨识框架  $\Theta = \{\theta_i\}_{i=1}^{10}$ , 证据集合包含证据  $E_1$ 、 $E_2$ , 其 BPA 分别为  $m_1$ 、 $m_2$ , 有  $m_1(\theta_j)=1/L$ ,  $j=1,2,\dots,L$ ,  $m_2(\theta_k)=1/L$ ,  $k=L+1,L+2,\dots,2L$ ,  $m_1$ 、 $m_2$  分别支持不同焦点,现逐渐调整  $L$ ,对  $L$  动态变化过程中各方法冲突度量结果进行统计,如表 2 所示。

表 2 全冲突场景扩展形式度量结果

$L$	$K$	$d_{BPA}$	$difBetP$	$K_d$	$Cor$	$diSV$	$G_{SVD}$
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	0.707 1	0.5	0.853 6	1	0.707 1	1
3	1	0.571 6	0.33	0.775 8	1	0.571 6	1
4	1	0.5	0.25	0.75	1	0.5	1
5	1	0.447 2	0.2	0.723 6	1	0.447 2	1

在  $L$  变化过程中,两证据始终信任不同的焦点,且信任程度一致,证据完全冲突。从表 2 可以看出,  $K$  由于仅关注证据的非相容性,度量恒为 1,度量结果正确。根据  $d_{BPA}$ 、 $difBetP$ 、 $K_d$  定义,3 种方法未考虑证据的一致性,度量结果会受证据信度离散程度的影响,随着  $L$  的增大,证据信度的离散程度增大,导致证据冲突降低,度量结果与实际不符。 $diSV$  仅考虑最小奇异值  $\sigma_{min}$  方向特征,未考虑其余特征,在证据完全冲突时,矩阵 2 个特征方向的重要性是一致的,即  $\sigma_{max} = \sigma_{min}$ ,并且随着证据信度离散程度的增加,奇异值减小,导致冲突度量结果与实际不符。 $Cor$ 、 $G_{SVD}$  方法由于综合考虑了证据的差异性和相似性,冲突度量结果正确。

#### 5.2 变信度场景

**例 4** 以文献[1]算例为参照,设辨识框架  $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ , 初始证据集合包含证据  $E_1$ 、 $E_2$ , 其 BPA 分别为  $m_1$ 、 $m_2$ , 有  $m_1(\theta_1)=0.9$ ,  $m_1(\theta_2)=0.1$ ,  $m_1(\theta_3)=0$ ,  $m_2(\theta_1)=0$ ,  $m_2(\theta_2)=0.1$ ,  $m_2(\theta_3)=0.9$ , 现增加第 3 条证据  $E_3$  到证据集合中,其 BPA 是动态变化的,  $m_3$  初始状态等同于  $m_2$ ,  $m_3$  的变化趋势分为 2 个阶段,第一阶段:  $m_1(\theta_1)=\varepsilon$ ,  $m_3(\theta_3)=0.9-\varepsilon$ ,  $m_3(\theta_2)=0.1$ , 增大  $\varepsilon$  直至  $m_3(\theta_1)=m_3(\theta_3)$ ; 第二阶段:  $m_3(\theta_1)=0.45-\varepsilon$ ,  $m_3(\theta_2)=0.1+2\varepsilon$ ,  $m_3(\theta_3)=0.45-\varepsilon$ , 增大  $\varepsilon$  直至  $m_3(\theta_2)=1$ 。对  $m_3$  动态变化过程中各方法冲突度量结果进行统计,如表 3 所示。

从表 3 中可以看出,在  $m_3$  为空,即只有 2 个证据时,  $m_1$  强烈信任  $\theta_1$ ,  $m_2$  强烈信任  $\theta_3$ , 且都部分信任  $\theta_2$ , 证据冲突较高,各方法都能较好地度量。当加入证据  $E_3$  时,由于  $m_3$  初始状态等同于  $m_2$ , 均强烈信任  $\theta_3$ , 证据信任分布的一致性增强,证据间冲突相应减少。 $K$  受“一票否决”的影响,冲突反而增加,与实际不符。当  $m_3$  在第一个阶段变化时,

表 3 变信度场景冲突度量结果

$m_3$	$K$	$d_{BPA}$	difBetP	$K_d$	Cor	diSV	$G_{SVD}$
$\phi$	0.99	0.9	0.9	0.945 0	0.987 8	0.9	0.987 9
[0 0.1 0.9]	0.999	0.6	0.6	0.799 5	0.658 5	0.6	0.658 6
[0.2 0.1 0.7]	0.999	0.6	0.6	0.799 5	0.580 2	0.574 7	0.606 9
[0.45 0.1 0.45]	0.999	0.6	0.6	0.799 5	0.521 7	0.563 1	0.582 5
[1/3 1/3 1/3]	0.996 7	0.628 1	0.676 7	0.812 4	0.569 4	0.569 2	0.599 8
[0.3 0.4 0.3]	0.996	0.646 4	0.7	0.821 2	0.604 5	0.589 0	0.622 4
[0.2 0.6 0.2]	0.994	0.716 3	0.766 7	0.855 2	0.729 6	0.679 4	0.721 4
[0 1 0]	0.99	0.9	0.9	0.945 0	0.922 3	0.887 1	0.903 7

$m_3$  仍然主要支持  $\theta_3$ ，但同时部分信任  $\theta_1$ ， $m_3$  对  $m_1$  支持性增加，证据集间冲突持续减小。 $K$ 、 $d_{BPA}$ 、difBetP、 $K_d$  度量结果保持不变，与实际不符。当  $m_3(\theta_1) = m_3(\theta_3)$  时， $m_3$  同时支持  $m_1$  和  $m_2$ ，证据间冲突达到最小。当  $m_3$  在第二阶段变化时， $m_3$  对  $\theta_2$  的信任持续增加，对  $\theta_1$ 、 $\theta_3$  的信任逐渐减小，对证据  $E_1$ 、 $E_2$  支持性减弱，证据冲突逐渐增大。当  $m_3$  完全信任  $\theta_2$  时，3 个证据分别信任不同的焦点，证据间冲突达到最大。在  $m_3$  动态变化过程中，Cor、diSV、 $G_{SVD}$  度量结果变化趋势均能根据证据集合变化正确变化。

5.3 变焦元场景

例 5 以文献[19]算例为参照，设辨识框架  $\Theta = \{\theta_i\}_{i=1}^{20}$ ，满足  $\theta_i = i$ ， $i = 1, 2, \dots, 20$ ，证据集合包含证据  $E_1$ 、 $E_2$ ，其 BPA 分别为  $m_1$ 、 $m_2$ ， $m_1$  满足  $m_1(\{2, 3, 4\}) = 0.05$ ， $m_1(\{7\}) = 0.05$ ， $m_1(A) = 0.8$ ， $m_1(\Theta) = 0.1$ ，其中  $A$  是  $\Theta$  的子集， $m_2$  满足  $m_2(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = 1$ ，现调整  $m_1$  中焦点  $A$  元素构成， $A$  初始状态为  $\{1\}$ ，每次递增一个元素直至变为  $\Theta$ ， $A$  中元素个数为  $N$ ，对  $N$  变化过程中各方法冲突度量结果进行统计，如表 4 所示。

从表 4 中可以看出，当焦点  $A$  中元素个数发生变化时，证据间一致性会发生变化， $K$  方法度量结果在焦点  $A$  整个变化过程中始终恒定不变，与实际情况不符。在  $A$  从  $\{1\}$  逐渐变化到  $\{1, 2, \dots, 5\}$  的过程中，2 条证据逐渐趋于一致，冲突性逐渐减小。当  $A$  等于  $\{1, 2, \dots, 5\}$  时，证据间一致性达到最大，证据间冲突达到最小。此后由于  $A$  变化到  $\{1, 2, \dots, 20\}$  过程中焦点元素数目增加，证据间一致性又逐渐降低，冲突也随之增大。 $d_{BPA}$ 、difBetP、 $K_d$ 、Cor、diSV、 $G_{SVD}$  方法冲

突度量结果变化趋势正确，并且  $G_{SVD}$  变化趋势更平缓。

表 4 变焦元场景-1 冲突度量结果

$N$	$K$	$d_{BPA}$	difBetP	$K_d$	Cor	diSV	$G_{SVD}$
1	0.05	0.785 8	0.605 0	0.417 9	0.560 3	0.713 6	0.456 7
2	0.05	0.686 7	0.426 7	0.368 3	0.248 0	0.535 5	0.391 8
3	0.05	0.570 5	0.248 3	0.310 3	0.083 6	0.351 4	0.350 0
4	0.05	0.423 7	0.195 0	0.236 8	0.023 8	0.211 7	0.314 3
5	0.05	0.132 3	0.125 0	0.091 1	0.003 4	0.084 3	0.279 5
6	0.05	0.388 4	0.258 3	0.219 2	0.019 6	0.188 9	0.308 7
7	0.05	0.502 9	0.353 6	0.276 5	0.064 2	0.328 3	0.339 8
8	0.05	0.570 5	0.425 0	0.310	0.106 9	0.410 6	0.357 0
9	0.05	0.618 7	0.480 6	0.334 4	0.152 1	0.480 3	0.371 0
10	0.05	0.655 4	0.525 0	0.352 7	0.196 7	0.540 0	0.382 6
11	0.05	0.684 4	0.561 4	0.367 2	0.239 0	0.592 0	0.392 4
12	0.05	0.708 2	0.591 7	0.379 1	0.278 5	0.638 1	0.400 8
13	0.05	0.728 1	0.617 3	0.389 0	0.314 7	0.679 6	0.408 1
14	0.05	0.745 1	0.639 3	0.397 6	0.347 9	0.717 3	0.414 4
15	0.05	0.759 9	0.658 3	0.405 0	0.378 1	0.751 9	0.420 1
16	0.05	0.773 0	0.675 0	0.411 5	0.405 6	0.783 8	0.425 1
17	0.05	0.784 6	0.689 7	0.417 3	0.430 5	0.813 3	0.429 6
18	0.05	0.795 1	0.702 8	0.422 5	0.453 3	0.840 8	0.433 7
19	0.05	0.804 6	0.714 5	0.427 3	0.473 9	0.866 3	0.437 5
20	0.05	0.813 3	0.725 0	0.431 7	0.492 8	0.889 9	0.440 9

例 6 设辨识框架  $\Theta = \{\theta_i\}_{i=1}^{10}$ ，证据集合包含证据  $E_1$ 、 $E_2$ ，其基本概率分配函数  $m_1$ 、 $m_2$  初始状态为  $m_1(A) = 1$ ， $A = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5\}$ ， $m_2(B) = 1$ ， $B = \{\theta_6, \theta_7, \theta_8, \theta_9, \theta_{10}\}$ ，现同时按顺序调增焦点  $A$ 、 $B$  中元素的数目，直到均变为  $\Theta$ ，焦点  $A$ 、 $B$  中相同元素的数目为  $N$ ，对  $N$  动态变化过程中各方法冲突度量结果进行统计，如表 5 所示。

表 5 变焦元场景-2 冲突度量结果

$N$	$K$	$d_{\text{BPA}}$	difBetP	$K_d$	Cor	diSV	$G_{\text{SVD}}$
0	1	1	1	1	1	1	1
2	0	0.894 4	0.666 7	0.447 2	0.615 4	0.800 0	0.714 3
4	0	0.774 6	0.428 6	0.387 3	0.310 3	0.600 0	0.555 6
6	0	0.632 5	0.250 0	0.316 2	0.117 6	0.400 0	0.454 5
8	0	0.447 2	0.111 1	0.223 6	0.024 4	0.200 0	0.384 6
10	0	0	0	0	0	0	0

从表 5 中可以看出,当证据为初始状态时,  $A$ 、 $B$  焦元相同元素的个数为 0, 证据完全冲突, 各方法度量结果均正确。随着  $N$  的增加, 证据同时信任的元素增加, 证据间的一致性增强, 冲突逐渐减小。直到  $N=10$ , 两证据完全相同时, 证据间冲突变为 0。由于  $K$  仅考虑到证据间非包容性, 度量结果恒为 0, 与实际不符。 $d_{\text{BPA}}$ 、difBetP、 $K_d$ 、Cor、diSV、 $G_{\text{SVD}}$  方法冲突度量结果变化趋势正确。

### 5.4 焦元嵌套场景

例 7 以文献[14]算例为参照, 设辨识框架  $\Theta = \{\theta_i\}_{i=1}^{10}$ , 证据集合为  $E$ , 相应的 BPA 函数为  $m_i$ , 每一条证据只有一个焦元, 且相互嵌套, 即  $E_1$  的焦元为  $\{\theta_1\}$ ,  $E_2$  的焦元为  $\{\theta_1, \theta_2\}$ ,  $E_i$  的焦元为  $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i\}$ , 且  $m_i$  满足  $m_i(\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i\})=1$ ,  $i=1, 2, \dots, N$ , 对  $N$  从 2 增加到 10 过程中各方法冲突度量结果进行统计, 如表 6 所示。

表 6 焦元嵌套场景冲突度量结果

$N$	$K$	$d_{\text{BPA}}$	difBetP	$K_d$	Cor	diSV	$G_{\text{SVD}}$
2	0	0.707 1	0.500 0	0.353 5	0.179 0	0.581 3	0.261 7
3	0	0.700 3	0.500 0	0.350 2	0.183 1	0.600 8	0.267 5
4	0	0.695 7	0.500 0	0.347 8	0.186 6	0.621 0	0.273 5
5	0	0.692 3	0.500 0	0.346 2	0.189 7	0.640 2	0.279 7
6	0	0.689 7	0.500 0	0.344 8	0.192 3	0.657 5	0.286 0
7	0	0.687 6	0.500 0	0.343 8	0.194 4	0.671 9	0.292 3
8	0	0.685 9	0.500 0	0.342 9	0.195 7	0.682 5	0.298 7
9	0	0.684 4	0.500 0	0.342 2	0.196 0	0.687 5	0.305 1
10	0	0.683 2	0.500 0	0.341 6	0.194 6	0.684 1	0.311 5

当  $N=2$  时, 证据  $E_1$ 、 $E_2$  焦元存在嵌套关系, 即  $\{\theta_1\} \subseteq \{\theta_1, \theta_2\}$ ,  $m_1$  完全信任  $\theta_1$ ,  $m_2$  同时信任  $\theta_1$  和  $\theta_2$ , 两证据具有一定的相似性, 同时也存在一定的冲突。从表 6 中可以看出, 由于证据焦元是相容的,  $K$  方法度量结果为 0, 与实际不符, 其余方法度量正确。当向证据集合加入证据  $E_i$  时,  $m_i$  除了信任前

$i-1$  条证据信任的  $\{\theta_1, \dots, \theta_{i-1}\}$  外, 还部分信任前  $i-1$  条证据否定的  $\theta_i$ , 证据间的冲突增大。随着  $N$  的持续增加, 证据集合中冲突焦元逐渐增多, 证据间的一致性降低, 证据集合总的冲突度也逐渐增大。 $K$  保持恒定不变, 与实际不符。 $d_{\text{BPA}}$ 、 $K_d$  由于焦元关联矩阵  $D$  会引起数据离散程度变化, 随着  $m_i$  支持的焦元元素数目的增多, 经  $D$  映射后, 证据信度的离散程度进一步增大,  $d_{\text{BPA}}$ 、 $K_d$  相应地减小, 与实际不符。difBetP 方法仅考虑到焦元支持程度的最大差异, 忽略了证据的相似性, 陷入局部极值点, 度量结果恒定不变, 不符合实际情况。Cor、diSV 考虑了证据的差异性和相似性, 但稳定性差, 在  $2 \leq N \leq 9$  时, 冲突度量结果逐渐增大, 在  $N=10$  时, 度量结果出现了减小的情况, 与实际不符。在证据集合增长过程中,  $G_{\text{SVD}}$  度量结果平稳增长, 变化趋势与实际相符。

综上所述, 相较于其他方法,  $G_{\text{SVD}}$  方法能够适应更多的证据场景, 且能够随着证据集合的变化动态地调整度量结果, 度量结果准确性高, 稳定性好。

## 6 结束语

证据冲突度量是制约证据理论运用效果的关键因素, 针对目前常见冲突度量方法的不足, 本文提出了一种基于 Pignistic 概率转换和奇异值分解的证据冲突度量方法, 通过 Pignistic 概率转换构建证据复合信任函数矩阵, 采用奇异值分解方法提取矩阵特征, 并基于奇异值构建了新的冲突度量因子。算例分析表明, 所提方法能够在全冲突场景、变信度场景、变焦元场景、焦元嵌套等多种证据场景下准确度量冲突, 与常见方法相比, 所提方法具有适应性广、准确性高、稳定好的优点。另外, 本文仅给出了证据冲突的度量方法, 如何依据冲突度量结果, 对冲突证据进行预处理以及选择合适的证据合成规则是下一步的研究重点。

### 参考文献:

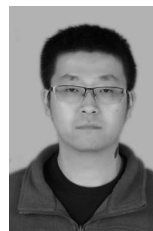
- [1] ZADEH L A. A simple view of the Dempster-Shafer theory of evidence and its implication for the rule of combination[J]. AI Magazine, 1986, 7(2): 85-90.
- [2] 包甜甜, 谢新连, 魏照坤. 新的证据冲突度量方法[J]. 控制理论与应用, 2017, 34(1): 41-48.  
BAO T T, XIE X L, WEI Z K. Novel approach for measuring the conflict between evidence[J]. Control Theory & Applications, 2017, 34(1): 41-48.
- [3] MURPHY C K. Combining belief functions when evidence con-

- flicts[J]. Decision Support Systems, 2000, 29(1): 1-9.
- [4] LIU Z G, DEZERT J, PAN Q, et al. Combination of sources of evidence with different discounting factors based on a new dissimilarity measure[J]. Decision Support Systems, 2011, 52(1): 133-141.
- [5] 王路, 邢清华, 毛艺帆. 基于信任度和确定度的证据加权组合方法[J]. 通信学报, 2017, 38(1): 83-88.  
WANG L, XING Q H, MAO Y F. Weighted evidence combination based on degree of credibility and certainty[J]. Journal on Communications, 2017, 38(1): 83-88.
- [6] 张欢, 陆见光, 唐向红. 面向冲突证据的改进 DS 证据理论算法[J]. 北京航空航天大学学报, 2020, 46(3): 616-623.  
ZHANG H, LU J G, TANG X H. An improved DS evidence theory algorithm for conflict evidence[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2020, 46(3): 616-623.
- [7] YAGER R R. On the Dempster-Shafer framework and new combination rules[J]. Information Sciences, 1987, 41(2): 93-137.
- [8] SMETS P. The combination of evidence in the transferable belief model[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990, 12(5): 447-458.
- [9] LEFEVRE E, COLOT O, VANNOORENBERGHE P. Belief function combination and conflict management[J]. Information Fusion, 2002, 3(2): 149-162.
- [10] DUBOIS D, PRADE H. Representation and combination of uncertainty with belief functions and possibility measures[J]. Computational Intelligence, 1988, 4(3): 244-264.
- [11] FLOREA M C, JOUSSELME A L, BOSSÉ É, et al. Robust combination rules for evidence theory[J]. Information Fusion, 2009, 10(2): 183-197.
- [12] 孙全, 叶秀清, 顾伟康. 一种新的基于证据理论的合成公式[J]. 电子学报, 2000, 28(8): 117-119.  
SUN Q, YE X Q, GU W K. A new combination rules of evidence theory[J]. Acta Electronica Sinica, 2000, 28(8): 117-119.
- [13] 张鑫, 牟龙华. 基于局部冲突消除的证据合成法则[J]. 系统工程与电子技术, 2016, 38(7): 1594-1599.  
ZHANG X, MU L H. Evidence combination rule based on local conflict elimination[J]. Systems Engineering and Electronics, 2016, 38(7): 1594-1599.
- [14] JOUSSELME A L, GRENIER D, BOSSÉ É. A new distance between two bodies of evidence[J]. Information Fusion, 2001, 2(2): 91-101.
- [15] 杨风暴. 证据冲突的衡量方法研究[J]. 华北工学院学报, 2005, 26(1): 58-60.  
YANG F B. Study on measure method for conflict of evidences[J]. Journal of North China Institute of Technology, 2005, 26(1): 58-60.
- [16] LIU W R. Analyzing the degree of conflict among belief functions[J]. Artificial Intelligence, 2006, 170(11): 909-924.
- [17] 蒋雯, 彭进业, 邓勇. 一种新的证据冲突表示方法[J]. 系统工程与电子技术, 2010, 32(3): 562-565.  
JIANG W, PENG J Y, DENG Y. New representation method of evidential conflict[J]. Systems Engineering and Electronics, 2010, 32(3): 562-565.
- [18] 柯小路, 马荔瑶, 王永. 奇异值衡量证据冲突的新方法[J]. 电子学报, 2013, 41(10): 2109-2112.  
KE X L, MA L Y, WANG Y. A new method to measure evidence conflict based on singular value[J]. Acta Electronica Sinica, 2013, 41(10): 2109-2112.
- [19] 宋亚飞, 王晓丹, 雷蕾, 等. 基于相关系数的证据冲突度量方法[J]. 通信学报, 2014, 35(5): 95-100.  
SONG Y F, WANG X D, LEI L, et al. Measurement of evidence conflict based on correlation coefficient[J]. Journal on Communications, 2014, 35(5): 95-100.
- [20] DEMPSTER A P. Upper and lower probabilities induced by a multi-valued mapping[J]. The Annals of Mathematical Statistics, 1967, 38(2): 325-339.
- [21] SHAFER G. A mathematical theory of evidence[M]. Princeton: Princeton University Press, 1976.
- [22] 蒋雯, 邓鑫洋. D-S 证据理论信息建模与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2018.  
JIANG W, DENG X Y. D-S evidence theory information modeling and application[M]. Beijing: Science Press, 2018.
- [23] 杨晓萍, 廉伟健, 李孟杰, 等. 基于 Pignistic 概率函数和相关系数的证据组合方法[J]. 通信学报, 2019, 40(3): 73-79.  
YANG X P, LIAN W J, LI M J, et al. Evidence combination method based on Pignistic function transformation and correlation coefficient[J]. Journal on Communications, 2019, 40(3): 73-79.
- [24] 张贤达. 矩阵分析与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.  
ZHANG X D. Matrix analysis and application[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.
- [25] 彭颖, 胡增辉, 沈怀荣. 一种修正证据距离[J]. 电子与信息学报, 2013, 35(7): 1624-1629.  
PENG Y, HU Z H, SHEN H R. A modified distance of evidence[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2013, 35(7): 1624-1629.

## [作者简介]



郭兴林 (1990- ), 男, 四川广元人, 中国工程物理研究院计算机应用研究所工程师, 主要研究方向为可信软件、形式化方法。



孙振晓 (1985- ), 男, 山东泰安人, 中国工程物理研究院计算机应用研究所工程师, 主要研究方向为可信软件、软件测试。

周昱瑶 (1988- ), 女, 纳西族, 云南丽江人, 中国工程物理研究院计算机应用研究所工程师, 主要研究方向为可信软件、人工智能软件测试。

漆莲芝 (1978- ), 女, 四川成都人, 中国工程物理研究院计算机应用研究所高级工程师, 主要研究方向为可信软件、人工智能软件测试。

张谊 (1974- ), 男, 四川乐山人, 中国工程物理研究院计算机应用研究所高级工程师, 主要研究方向为软件测试、软件可靠性、需求建模。